I.U.P. Lorient
Maîtrise GEII **Emmanuel Boutillon**

Travaux Dirigés de signal n°3
Processus Aléatoire

Exercice n°1 : On considère le processus aléatoire à temps continu défini par
$X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \Phi)$ où A et f_0 sont des constantes et où Φ est une v.a. uniforme sur $[0, 2\pi]$.

1) Pour t fixé, rappeler l'expression de la densité de probabilité de $X(t)$.

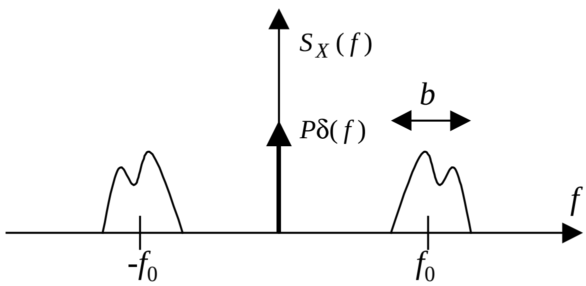
2) Déterminer l'expression des moments statistiques d'ordre 1 et 2.

3) Déterminer l'expression des moments temporels d'ordre 1 et 2.

Exercice n°2 : Dire pourquoi les fonctions $R_{XX}(\tau) = 1_{(-T,T)}(\tau)$ et $R_{YY}(\tau) = |\tau|\exp(-|\tau|)$ ne sont pas des fonctions d'autocovariance d'un p.a.

Exercice n°3 : Trajectoire d'un p.a.

On considère un processus aléatoire $X(t)$ à temps continu, réel, dont la densité spectrale de puissance a la forme représentée sur la figure. On suppose que $b << f_0$. Esquisser en fonction de P, b et f_0 la forme d'une trajectoire.



Exercice n°4 : Soit $X(t)$ un p.a. stationnaire dont la fonction d'autocorrélation est donnée par :

$$R_{XX}(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{\tau_0}}.$$

Donner la d.s.p. $S_X(f)$ du p.a. $X(t)$.

Exercice n°5 (signal du télégraphiste) : Soit le p.a. $X(t)$ à valeur dans {-1, +1} qui vérifie les propriétés suivantes :

1) $P(X(t=0)=0)=p$

2) Le nombre K de transitions de $X(t)$ (passage de –1 à +1 ou de +1 à –1) sur un intervalle de temps T est un variable aléatoire qui suit une loi de poisson continue de moyenne IT définie par : $P(Tr = K) = \dfrac{e^{-IT}(IT)^k}{k!}$

3) Le nombres de transitions dans deux intervalles disjoints sont des v.a. indépendantes.

<u>Question 1</u> : Tracer l'allure du signal ainsi généré pour $I = 1\ s^{-1}$.

<u>Question 2</u> : Déterminer les expression de $P(X(t)=+1/P(X(t=0)=-1)$ et de $P(X(t)=+1/P(X(t=0)=+1)$. En déduire les expression de $P(X(t)=+1)$ et $P(X(t)= -1)$.

<u>Question 3</u> : Déterminer l'expression de $E[X(t)]$ en fonction de p et de I.

<u>Question 4</u> : A quelle condition le processus est-il stationnaire ?

<u>Question 5</u> : On suppose la condition précédente remplie. Déterminer l'expression de la fonction d'autocovariance $R_{XX}(\tau)$ de $X(t)$.

<u>Question 6</u> : Calculer la d.s.p. $S_X(f)$ du p.a. $X(t)$.

Rappel : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{2k}}{(2k)!} = \cosh(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sinh(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$